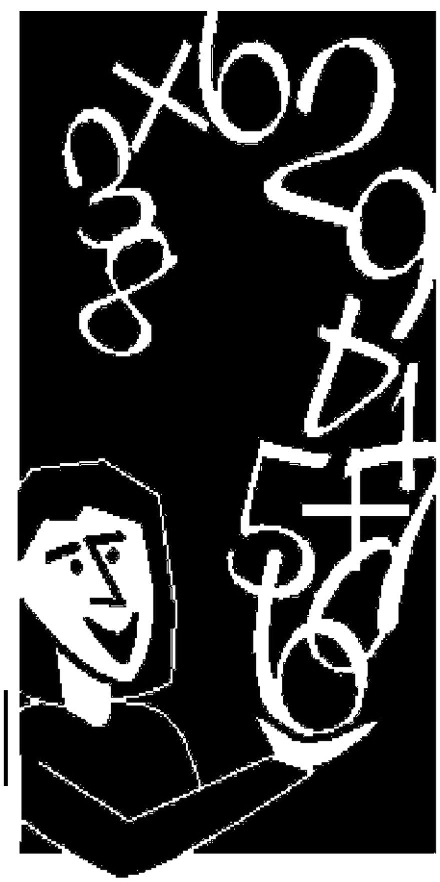
Concours Opti-math
GRMS
Secrétariat
1000, rue Saint-Antoine
Terrebonne, Québec
J6W 1P3

Épreuve finale
Cahier de solutions



Concours
Opti-Math + 2020

Comité d’élaboration des épreuves

Responsable

Jean-Daniel Gagnon	Séminaire Marie-Reine-du-Clergé

Comité de rédaction

Rédaction d’items

Mélanie Auclair	C.S. des Hauts-Cantons
Guy Breton	Retraité
Geanina Craciun	École secondaire Henri-Dunant
Ghislain Desmeules	Retraité
Martin Duchesne	École secondaire Polybel
Éric Lapointe	Pavillon Wilbrod-Dufour
Félicia Postoronca	École secondaire Paul-Guérin-Lajoie
Keven Poulin	Collège Sainte-Anne de Lachine
Martin Salesse	École secondaire Camille-Lavoie
Audrey Savard	École secondaire de Mortagne
Marie-Hélène Simard	Collège Sainte-Anne de Lachine

Sélection d’items

Jean-Daniel Gagnon	Séminaire Marie-Reine-du-Clergé
Martin Salesse	École secondaire Camille-Lavoie

Révision et correction

Claude Boucher	École secondaire Marcellin-Champagnat
Guy Breton	Retraité
Nathalie Demers	École secondaire De Rochebelle
Ghislain Desmeules	Retraité
Martin Duchesne	École secondaire Polybel
Daniel Ouellet	École du Mistral
Éric Lapointe	Pavillon Wilbrod-Dufour

Situation 1 *Le mur de briques mathématiques*

Étant donné que le nombre 1 est au centre et touche à 3 sommes de trois nombres, il faut 3 paires de nombres additionnés ensemble qui donnent la même somme :

Premier essai

Jumelons le plus grand nombre (9) avec le plus petit nombre (2), le deuxième plus grand nombre (8) avec le deuxième plus petit nombre (3), et ainsi de suite.

Nous obtenons 9+2=11, 8+3=11 et 7+4=11. À ces sommes ajoutons le nombre 1, ce qui donne une somme de 12. Impossible d'équilibrer le mur car la somme est trop petite.

Deuxième essai

Gardons les nombres 9, 8 et 7 pour chaque paire. Par contre, prenons trois chiffres un peu plus grands, soit 3, 4 et 5, pour compléter les paires.

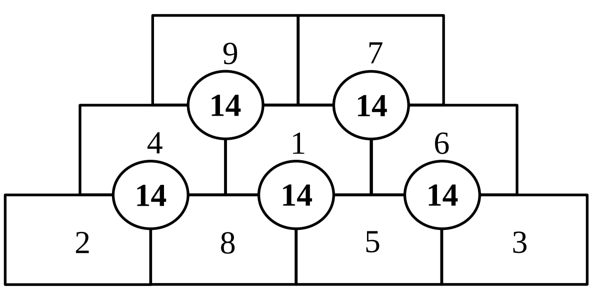
Nous obtenons 9+3=12, 8+4=12 et 7+5=12. La somme des 3 briques donne 13. Impossible d'équilibrer le mur.

Troisième essai

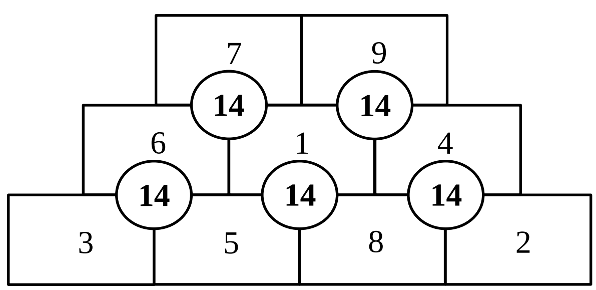
Jumelons maintenant les nombres 9, 8 et 7 avec les nombres 4, 5 et 6.

Nous obtenons 9+4=13, 8+5=13 et 7+6=13. Il est possible d'équilibrer le mur où les sommes sont toutes égales à 14. La symétrie est acceptée.

Réponse : La symétrie est acceptée.



ou



Barème : Accorder 10 points pour une bonne réponse.

Situation 2 *En autobus et à pied*

On calcule la vitesse moyenne de marche de Martin en km/h :

$$\frac{400 \text{ m}}{5 \text{ min}} = \frac{4800 \text{ m}}{60 \text{ min}} = 4{,}8 \text{ km/h}$$

On calcule le temps pour l'autobus A : 3 h 33 min

- Temps d'attente : 12 min
- Temps en autobus : 2 h 6 min

  $\frac{20 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \frac{42 \text{ km}}{? \text{ min}}$? = 126 min
- Temps à la marche : 1 h 15 min

  $\frac{4{,}8 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \frac{6 \text{ km}}{? \text{ min}}$? = 75 min
- Temps total : 12 min +2 h 6 min +1h 15 min = 3 h 33 min

On calcule le temps pour l'autobus B : 3 h 31 min 30 s

- Temps d'attente : 20 min
- Temps en autobus : 2 h 9 min

  $\frac{20 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \frac{43 \text{ km}}{? \text{ min}}$? = 129 min
- Temps à la marche : 1 h 2 min 30 s

  $\frac{4{,}8 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \frac{5 \text{ km}}{? \text{ min}}$? = 62,5 min
- Temps total : 20 min +2 h 9 min +1h 2 min 30 s = 3 h 31 min 30 s

On calcule le temps pour l'autobus C : 3 h 32 min

- Temps d'attente : 30 min
- Temps en autobus : 2 h 12 min

  $\frac{20 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \frac{44 \text{ km}}{? \text{ min}}$? = 132 min
- Temps à la marche : 50 min

  $\frac{4{,}8 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \frac{4 \text{ km}}{? \text{ min}}$? = 50 min
- Temps total : 30 min +2 h 12 min + 50 min= 3 h 32 min

Réponse : Martin doit prendre l'autobus **B** et il lui faudra **3** h **31** min **30** s pour arriver le plus tôt possible à sa destination.

Barème : Accorder 10 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
Accorder 3 points pour avoir calculé le temps pour l'autobus A (3 h 33 ou 213 min).
Accorder 3 points pour avoir calculé le temps pour l'autobus B (3 h 31 30 s ou 211,5 min).
Accorder 3 points pour avoir calculé le temps pour l'autobus C (3 h 32 ou 212 min).
Accorder 1 point pour avoir identifié correctement l'autobus le plus rapide (**B**).

Situation 3 *Une suite logique!*

a) Il est possible de déterminer le nombre de carrés de la 6e figure par dénombrement.

La 6e figure possèdera…

- … 36 carrés dont les côtés mesurent 1 unité,
- … 25 carrés dont les côtés mesurent 2 unités,
- … 16 carrés dont les côtés mesurent 3 unités,
- … 9 carrés dont les côtés mesurent 4 unités,
- … 4 carrés dont les côtés mesurent 5 unités,
- … 1 carré dont les côtés mesurent 6 unités, pour un total de 91 carrés.

Réponse : La 6e figure de cette suite sera formée de **91** carrés au total.

b) Il est également possible de déterminer la régularité de cette suite. Pour calculer le nombre de carrés de la n^e figure, il s'agit d'ajouter n^2 carrés à ceux de la figure précédente, soit la $(n-1)^e$ figure.

Rang de la figure dans la suite	Nombre total de carrés	Nombre de carrés ajoutés
1re	1	
2e	5	+ 4 (2^2)
3e	14	+ 9 (3^2)
4e	30	+ 16 (4^2)
5e	55	+ 25 (5^2)
6e	91	+ 36 (6^2)
7e	140	+ 49 (7^2)
8e	204	+ 64 (8^2)
9e	285	+ 81 (9^2)
10e	385	+ 100 (10^2)
11e	506	+ 121 (11^2)
12e	650	+ 144 (12^2)
13e	819	+ 169 (13^2)
14e	1015	+ 196 (14^2)
15e	1240	+ 225(15^2)

Réponse : La 15e figure de cette suite sera formée de **1240** carrés au total.

Barème : a) Accorder 4 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
b) Accorder 6 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.

Situation 4 *Entre eau et glace*

a) On calcule le volume du glaçon :

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot (1\text{ cm})^2 \cdot 9\text{ cm}}{3} = 3\pi\text{ cm}^3 = 9{,}4247 \ldots\text{cm}^3$$

On calcule le volume lorsqu'il revient à l'état liquide :

$$\frac{3\pi\text{ cm}^3}{x} = \frac{110}{100}$$
$$x = \frac{3\pi\text{ cm}^3 \cdot 100}{110} = \frac{30}{11}\pi\text{ cm}^3 = 8{,}5679 \ldots\text{cm}^3$$

<u>Réponse</u> : La quantité d'eau obtenue est de **<u>8,6</u>** ml si aucune goutte n'a été perdue ni évaporée.

b) On calcule le volume du glaçon au départ :

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot (2\text{ cm})^2 \cdot 12\text{ cm}}{3} = 16\pi\text{ cm}^3 = 50{,}2654 \ldots\text{cm}^3$$

On calcule le volume de glace ajouté :

$$\frac{x}{5{,}5\pi\text{ cm}^3} = \frac{110}{100}$$
$$x = \frac{5{,}5\pi\text{ cm}^3 \cdot 110}{100} = \frac{121}{20}\pi\text{ cm}^3 = 19{,}0066 \ldots\text{cm}^3$$

On calcule le volume du nouveau glaçon :

$$16\pi\text{ cm}^3 + \frac{121}{20}\pi\text{ cm}^3 = \frac{441}{20}\pi\text{ cm}^3 = 69{,}2721 \ldots\text{cm}^3$$

On calcule la nouvelle hauteur du glaçon :

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$
$$\frac{441}{20}\pi\text{ cm}^3 = \frac{\pi \cdot (2\text{ cm})^2 \cdot h}{3}$$
$$\frac{441}{20}\pi\text{ cm}^3 = \frac{4}{3}\pi h\text{ cm}^2$$
$$h = \frac{1323}{80}\text{cm} = 16{,}5375\text{ cm}$$

<u>Réponse</u> : La nouvelle hauteur du glaçon est de **<u>16,5</u>** cm après l'ajout de l'eau.

Barème : a) Accorder 4 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
Accorder 2 points pour avoir calculé le volume du glaçon (9,4247 ... cm^3).
b) Accorder 6 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
Accorder 3 points pour avoir calculé le volume du nouveau glaçon (69,2721 ... cm^3).
Ne pas pénaliser l'élève qui n'a pas arrondi correctement ses réponses.

Situation 5 *Un livre d'histoire*

On désigne le nombre de pages pour chacun des chapitres par les lettres a, b, c, d et e.
On traduit les informations en 5 équations :

1) $a + b + c + d + e = 753$
2) $a + b + c = 354$
3) $c + d + e = 477$
4) $a = d - 86$
5) $e = a + 55$

Avec les équations 2 et 3, on déduit que le 3^e chapitre a 78 pages.
Le 3^e chapitre est dans chacune des sommes. On additionne les sommes et on enlève le total pour obtenir le troisième chapitre.

$$354 + 477 = 831$$
$$831 - 753 = 78$$

Comme nous connaissons la valeur de c, nous pouvons changer l'équation 3 : $d + e = 399$.
Si nous substituons l'équation 4 dans celle-ci, on obtient $a + 86 + e = 399$. Nous pouvons maintenant faire une substitution avec l'équation 5 : $a + 86 + e = 399$ et $e = a + 55$.

$$a + 86 + a + 55 = 399$$
$$2a = 258$$
$$a = 129$$

À l'aide de l'équation 2, on trouve que le 2^e chapitre a 147 pages.

$$a + b + c = 354$$
$$129 + b + 78 = 354$$
$$b = 147$$

À l'aide de l'équation 4, on trouve que le 4^e chapitre a 215 pages.

$$a = d - 86$$
$$129 = d - 86$$
$$215 = d$$

À l'aide de l'équation 5, on trouve que le 5^e chapitre a 184 pages.

$$e = a + 55$$
$$e = 129 + 55$$
$$e = 184$$

<u>**Réponse**</u> : Le 1er chapitre a <u>**129**</u> pages.
Le 2^e chapitre a <u>**147**</u> pages.
Le 3^e chapitre a <u>**78**</u> pages.
Le 4^e chapitre a <u>**215**</u> pages.
Le 5^e chapitre a <u>**184**</u> pages.

Barème : Accorder 2 points pour chaque bonne réponse et une démarche acceptable (**129, 147, 78, 215 et 184**).

Situation 6 *Triplets de polygones réguliers*

a) On pose « a », la mesure d'un côté du petit carré, en cm.
On peut ainsi déduire l'expression algébrique de l'aire du petit carré qui est de a^2, celle du moyen carré qui est de $9a^2$ et celle du grand carré qui est de $81a^2$.

La somme des aires des 3 carrés : $a^2 + 9a^2 + 81a^2 = 91a^2$

Comme l'aire totale de la figure est de 568,75 cm², on résout l'équation suivante :

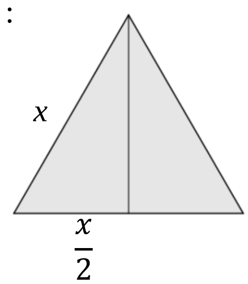
$$91a^2 = 568{,}75 \text{ cm}^2$$
$$a^2 = 6{,}25 \text{ cm}^2$$
$$a = 2{,}5 \text{ cm}$$

Le périmètre de la figure est de $44a$. On calcule le périmètre de la figure :

$$44a = 44 \cdot 2{,}5 \text{ cm} = 110 \text{ cm}$$

<u>Réponse</u> : La mesure du périmètre de cette figure est de **<u>110</u>** cm.

b) On pose « x » la mesure d'un côté du petit triangle équilatéral, en cm.
On peut trouver à l'aide de la relation de Pythagore la hauteur du triangle :



$$x^2 = (\frac{x}{2})^2 + h^2$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0{,}8660 \dots x$$

On calcule l'expression algébrique de l'aire du petit triangle :

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 0{,}4330 \dots x^2$$

Comme les triangles ont un rapport de similitude de 3 entre eux, le rapport de leur aire est de $3^2 = 9$. Donc, l'expression algébrique de l'aire du moyen triangle est de $\frac{9\sqrt{3}}{4}x^2$ et celle du grand est de $\frac{81\sqrt{3}}{4}x^2$. L'expression algébrique de l'aire totale de la figure est de $\frac{91\sqrt{3}}{4}x^2$.

Comme l'aire totale de la figure est de 965,40 cm², on résout l'équation suivante :

$$\frac{91\sqrt{3}}{4}x^2 = 965{,}40 \text{ cm}^2$$
$$x^2 = 24{,}4999\dots \text{ cm}^2$$
$$x = 4{,}9497\dots \text{ cm}$$

Le périmètre de la figure est de $31x$. On calcule le périmètre de la figure :

$$31x = 31 \cdot 4{,}9497 \dots \text{ cm} = 153{,}4420 \dots \text{ cm}$$

<u>Réponse</u> : La mesure du périmètre de cette figure est de **<u>153</u>** cm.

Barème : a) Accorder 5 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
Accorder 3 points pour avoir calculé la mesure d'un côté du petit carré (2,5 cm).
b) Accorder 5 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
Accorder 3 points pour avoir calculé la mesure d'un côté du petit triangle (4,9497… cm).
Ne pas pénaliser l'élève qui n'a pas arrondi correctement ses réponses.

Situation 7 *2019*

Les nombres peuvent avoir la forme :

- 2019ABCD
- A2019BCD
- AB2019CD
- ABC2019D
- ABCD2019

Les lettres A, B, C et D peuvent avoir les valeurs des chiffres {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, en tout 10 chiffres.

Pour le premier cas, nous avons : $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$ nombres.

Pour les 4 autres cas, le « A » ne peut pas avoir la valeur de 0. Donc, il y a $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$ nombres.

Comme le nombre 20192019 a déjà été compté au premier cas, nous ne devons pas le compter pour le dernier cas. Donc, il y a $9\,000 - 1 = 8\,999$ nombres.

Donc, nous avons $10\,000 + 3 \times 9\,000 + 8\,999 = 45\,999$ nombres qui contiennent la séquence « 2019 ».

<u>Réponse</u> : Il y a **<u>45 999</u>** nombres à 8 chiffres qui contiennent exactement la séquence « 2019 ».

Barème : Accorder 10 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
Accorder 7 points si l'élève a répondu 46 000.
Accorder 3 points si l'élève a répondu 50 000 ou 49 999.

Situation 8 *Relation entre deux figures*

a) L'expression algébrique de l'aire du grand carré est $(2a)^2 = 4a^2$.
On peut connaître la mesure d'un côté de petit carré à l'aide de la relation de Pythagore :

$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c = \sqrt{2}a$$

L'expression algébrique de l'aire du plus petit carré est : $\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a = 2a^2$

Donc, le rapport des aires est de $\frac{2a^2}{4a^2} = \frac{1}{2}$.

Réponse : Le rapport des aires de ces deux carrés est de $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

b) L'aire du petit cercle est de $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi\frac{a^2}{4}$.

L'aire du grand cercle est de πa^2.

Donc, le rapport des aires est de $\frac{\pi\frac{a^2}{4}}{\pi a^2} = \frac{1}{4}$.

Réponse : Le rapport des aires de ces deux cercles est de $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

c) L'aire du grand losange est de a^2.

L'aire du petit losange est de $\frac{(a\cdot\frac{a}{2})}{2} = \frac{a^2}{4}$.

Donc, le rapport des aires est de $\frac{\frac{a^2}{4}}{a^2} = \frac{1}{4}$

Réponse : Le rapport des aires de ces deux losanges est de $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

Barème : a) Accorder 2 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
b) Accorder 4 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
c) Accorder 4 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.

Situation 9 *Les scarabées japonais*

a)

Nombre de semaines	Nombre de scarabées avant	Nombre de scarabées enlevés	Nombre de scarabées après
0	100	18	82
1	(82x110%) ≈ 90	19	71
2	(71x110%) ≈ 78	20	58
3	(58x110%) ≈ 64	21	43
4	(43x110%) ≈ 47	22	25
5	(25x110%) ≈ 28	23	5
6	(5x110%) ≈ 6	6	0

Réponse : Catherine a enlevé les **6** derniers scarabées après **6** semaines.

b) Si Catherine a enlevé 14 scarabées à la fin, cela signifie qu'il y avait au moins 7 scarabées au début de la saison. On procède par essai-erreur.

- 7 scarabées : 11 semaines, 2 scarabées la dernière semaine.
- 8 scarabées : 10 semaines, 2 scarabées la dernière semaine.
- 9 scarabées : 9 semaines, 3 scarabées la dernière semaine.
- 10 scarabées : 8 semaines, 9 scarabées la dernière semaine.
- **11 scarabées : 7 semaines, 14 scarabées la dernière semaine.**
- 12 scarabées : 7 semaines, 2 scarabées la dernière semaine.

Nombre de semaines	Nombre de scarabées avant	Nombre de scarabées enlevés	Nombre de scarabées après
0	80	11	69
1	(69x110%) ≈ 76	12	64
2	(64x110%) ≈ 70	13	57
3	(57x110%) ≈ 63	14	49
4	(49x110%) ≈ 54	15	39
5	(39x110%) ≈ 43	16	27
6	(27x110%) ≈ 30	17	13
7	(13x110%) ≈ 14	14	0

Réponse : Catherine a enlevé **11** scarabées au début de la saison.

On peut admettre une méthode algébrique où x est le nombre de scarabées enlevé la première semaine.

$$1.1(1.1\ (1.1\ (1.1\ (1.1\ (1.1\ (1.1\ (80\ -\ x)\ -\ x\ -\ 1)\ -\ x\ -\ 2)\ -\ x\ -\ 3)\ -\ x\ -\ 4)\ -\ x\ -\ 5)\ -\ x\ -\ 6)\ =\ 14$$

$$128{,}5384\ldots\ -\ 10{,}4358\ldots x\ =\ 14$$

$$x = 10{,}97544\ldots$$

Donc, l'élève peut vérifier si cela fonctionne avec 11 scarabées enlevés au départ.

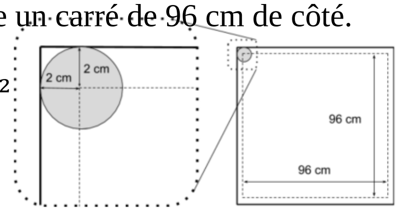
Barème : a) Accorder 5 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
b) Accorder 5 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.

Situation 10 *Parfaitement à l'intérieur*

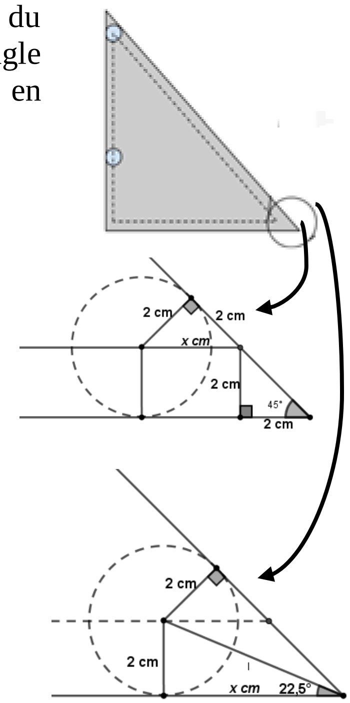
Dans cette expérience aléatoire, on a : $\Omega = \{x \mid x$ est une position possible de la pièce à l'intérieur de la boîte$\}$ et on s'intéresse à l'événement A = $\{y \mid y$ est une position possible de la pièce lorsqu'elle repose entièrement à l'intérieur du triangle gris$\}$. La position de la pièce sera déterminée par le point occupé par son centre. Le rapport des aires de ces deux régions nous donne la probabilité de l'événement A.

1) On calcule l'aire associée à Ω.
   Comme le centre de la pièce doit être à au moins 2 cm des rebords de la boîte, l'ensemble des positions possibles pour le centre de la pièce forme un carré de 96 cm de côté.

   Aire du carré : $A = c^2 \Rightarrow 96^2 = 9\,216 \text{ cm}^2$



2) On calcule l'aire associée à l'événement A.
   Le centre de la pièce doit être à au moins 2 cm des limites des côtés du triangle. L'ensemble des positions possibles forme un triangle rectangle isocèle plus petit que celui dessiné au fond de la boîte (le triangle en pointillé dans l'image ci-contre).



   Pour calculer la longueur d'une cathète, il y a deux méthodes possibles.
   - On peut utiliser la relation de Pythagore. Si on regarde le coin du triangle, on a 2 triangles rectangles isocèles dont les cathètes sont de 2 cm.
     $$x \text{ cm } = \sqrt{(2 \text{ cm})^2 + (2 \text{ cm})^2} = \sqrt{8} \text{ cm} = 2{,}8284 \ldots \text{cm}$$
   - On peut utiliser la relation trigonométrique de la tangente.
     $$\tan 22{,}5° = \frac{2 \text{ cm}}{x \text{ cm}} \rightarrow x \text{ cm} = \frac{2 \text{ cm}}{\tan 22{,}5°} = 4{,}8284 \ldots \text{cm}$$

   On calcule la longueur d'une cathète du triangle en pointillé :
   $$60 \text{ cm} - 2 \text{ cm} - 2 \text{ cm} - \sqrt{8} \text{ cm} = 53{,}1715\ldots \text{cm}$$

   On calcule l'aire du triangle en pointillé :
   $$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{(53{,}1715\ldots \text{cm})^2}{2} = 1\,413{,}6080\ldots \text{cm}^2$$

3) On calcule la probabilité de l'événement A :
   $$P(A) = \frac{1\,413{,}6080\ldots \text{cm}^2}{9\,216 \text{ cm}^2} = 0{,}153386 \ldots = 15{,}3386 \ldots \%$$

<u>Réponse</u> : La probabilité que la pièce repose entièrement à l'intérieur du triangle gris est de **15** %.

Barème : Accorder 10 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
Accorder 3 points pour avoir calculé l'aire associée à Ω (9 216 cm²).
Accorder 3 points pour avoir calculé la longueur d'une cathète (53,1715… cm).
Accorder 2 points pour avoir calculé l'aire du triangle (1 413,6080… cm²).
Accorder 2 points pour avoir calculé la probabilité (15,3386 ... %).
Ne pas pénaliser l'élève qui n'a pas arrondi correctement sa réponse.

<u>Le concours prend fin ici pour les élèves de 4^e secondaire.</u>

Situation 11 *Le chemin de fer*

- On substitue dans la fonction *f*(*x*) le point de départ B(0, 1). On trouve ainsi la valeur de *d*.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$1 = d$$

- On trouve la pente du segment AB. On peut ainsi trouver la valeur de *c* = 2.

$$Pente = \frac{1-0}{0+\frac{1}{2}} = 2$$

- On substitue les coordonnées du point C(2, $\frac{5}{2}$) dans la fonction *f*(*x*).

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 1$$
$$\frac{5}{2} = 8a + 4b + 4 + 1$$
$$b = -2a - \frac{5}{8}$$

- On substitue les coordonnées du point D(4, 3) dans la fonction *f*(*x*).

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 1$$
$$3 = 64a + 16b + 8 + 1$$
$$b = -4a - \frac{3}{8}$$

- On utilise la méthode de comparaison avec les deux dernières équations pour trouver la valeur de *a* et celle de *b*.

$$-2a - \frac{5}{8} = -4a - \frac{3}{8}$$
$$2a = \frac{2}{8}$$
$$a = \frac{1}{8} \text{ et } b = -\frac{7}{8}$$

<u>Réponse</u> : La règle de la fonction est $f(x) = \boldsymbol{\frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + 2x + 1}$ ou
$f(x) = \mathbf{0,125}x^3 - \mathbf{0,875}x^2 + \mathbf{2}x + \mathbf{1}$.

Barème : Accorder 10 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.
Accorder 3 points si l'élève a trouvé la bonne valeur de *a* (0,125).
Accorder 3 points si l'élève a trouvé la bonne valeur de *b* (-0,875).
Accorder 2 points si l'élève a trouvé la bonne valeur de *c* (2).
Accorder 2 points si l'élève a trouvé la bonne valeur de *d* (1).

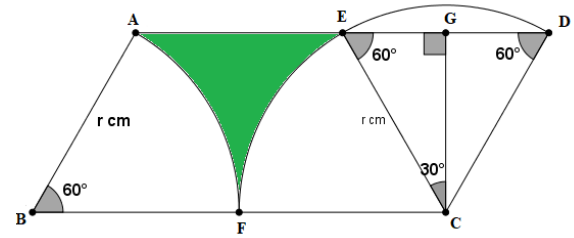
Situation 12 *Le tee*

Pour résoudre ce problème, il faut :

1) En traçant le segment CE, on construit le triangle équilatéral DCE.

2) En traçant la hauteur du triangle DCE, on obtient deux triangles rectangles isométriques dont l'un des angles mesure 30°. La mesure du côté opposé à l'angle de 30° est la moitié de l'hypoténuse. Ainsi, la mesure du segment EG est de $\frac{r}{2}$ cm et celle du segment ED de r cm.

   On obtient par la relation de Pythagore la hauteur GC qui est de $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ cm.



3) Aire du triangle DCE : $A = \frac{r\ cm \times \frac{\sqrt{3}r}{2}\ cm}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$ cm²

4) On calcule l'aire des secteurs ECF et FBA à partir de cette proportion : $\frac{60°}{360°} = \frac{aire\ secteur}{\pi r^2}$

   L'aire du secteur ECF et celle du secteur FBA est la même, soit $\frac{\pi r^2}{6}$ cm².

5) Sachant que la hauteur du parallélogramme est de $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ cm, on détermine l'aire du parallélogramme : $A_p = b \times h \Rightarrow 2r\text{ cm} \times \frac{\sqrt{3}}{2}r\text{ cm} = \sqrt{3}r^2\text{ cm}^2$.

6) L'aire de la région ombragée est égale à l'aire du parallélogramme ABCD diminuée de la somme des aires du triangle DCE, du secteur ECF et du secteur FBA:

$$\sqrt{3}r^2\text{cm}^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{\pi}{6}r^2 + \frac{\pi}{6}r^2\right)\text{cm}^2$$
$$= \left(\sqrt{3}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 - \frac{\pi}{6}r^2 - \frac{\pi}{6}r^2\right)\text{cm}^2$$
$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)r^2\text{ cm}^2$$
$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)r^2\text{ cm}^2 = 0{,}2518\ldots r^2\text{ cm}^2$$

Réponse : L'expression algébrique réduite qui représente l'aire de la région ombragée est de $\left(\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}}\right)\boldsymbol{r^2}$ cm² ou $\left(\boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}-4\pi}{12}}\right)\boldsymbol{r^2}$ cm².

Barème : Accorder 10 points pour une bonne réponse et une démarche acceptable.

Accorder 1 point pour avoir trouvé la hauteur du trapèze ($\frac{\sqrt{3}}{2}r$ cm ou 0,8660 ... r cm).

Accorder 2 points pour avoir trouvé l'aire du triangle DCE ($\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$ cm² ou 0,4330… r^2 cm²).

Accorder 2 points pour avoir trouvé l'aire du secteur ECF ou FBA ($\frac{\pi r^2}{6}$ cm² ou 0,5235… r^2 cm²).

Accorder 2 points pour avoir trouvé l'aire du parallélogramme ABCD ($\sqrt{3}r^2$ cm² ou 1,7320… r^2 cm²).

Accorder 3 points pour avoir trouvé la réponse finale ($\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)r^2$ cm² ou 0,2518… r^2 cm²).